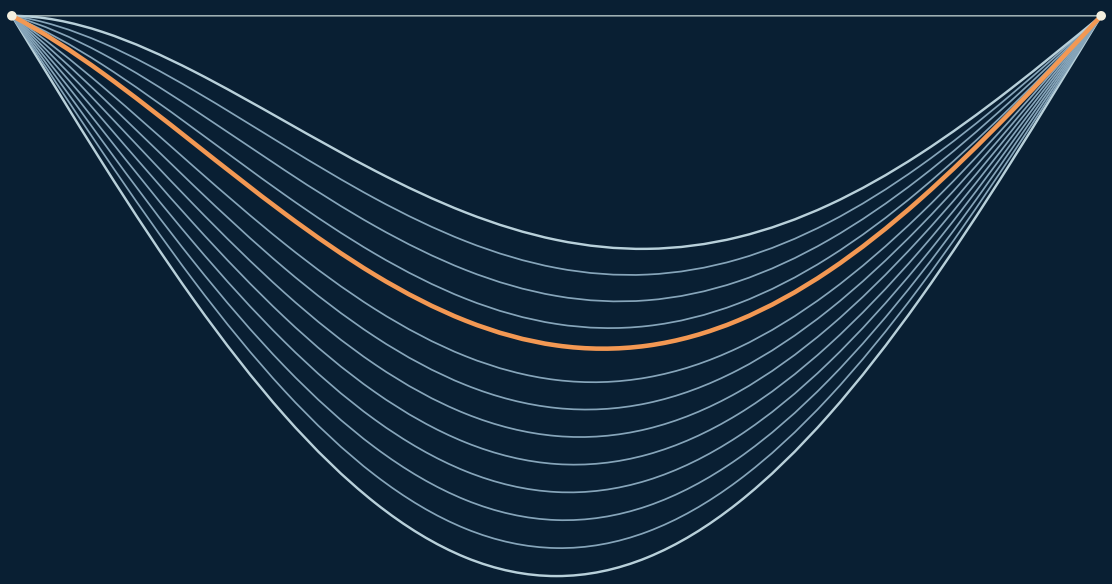
Michele Rizzato

Statica parametrica delle strutture

Un atlante del comportamento strutturale



ESERCIZIO SVOLTO · DAL § 10.11

Quanto irrigidire l’appoggio?

Una trave di 6 m porta un carico uniforme di 10 kN/m. In A la traslazione verticale è impedita e una molla contrasta la rotazione. In B la trave poggia su un appoggio semplice. La rigidezza flessionale EI è costante e vale 60 000 kN·m².

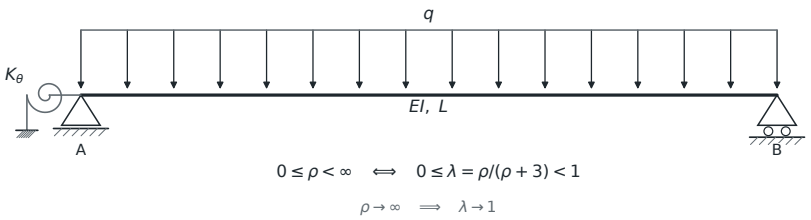


Figura 10.1 del volume. Schema statico e rigidezza rotazionale in A.

La domanda

Quale rigidezza della molla rende minimo il più grande momento flettente in valore assoluto lungo la trave? Individuare le sezioni in cui si raggiunge questo valore e confrontarlo con i due casi limite.

Il parametro che descrive il vincolo

Si misura la rigidezza della molla rispetto a quella della trave e si introduce un parametro compreso tra zero e uno.

$$\rho = \frac{K_\theta L}{EI}, \qquad \lambda = \frac{\rho}{\rho + 3}$$

La cerniera corrisponde a λ = 0. Aumentando la rigidezza, λ tende a 1, limite dell’incastro ideale. Nel volume il momento è positivo all’appoggio e negativo in campata per questo schema di carico.

SVOLGIMENTO

Dove cade il massimo?

Ponendo ξ = x/L, il campo del momento della trave si scrive

$$\frac{M(x)}{qL^2} = \frac{(1-\xi)(\lambda - 4\xi)}{8}.$$

In A si pone ξ = 0. In campata si annulla la derivata rispetto a ξ e si trova il minimo in ξ = (4 + λ)/8. Dividendo i moduli dei due picchi per qL² si ottengono

$$J_{\mathrm{A}} = \frac{\lambda}{8}, \qquad J_{\mathrm{campata}} = \frac{(4-\lambda)^2}{128}.$$

Il primo cresce con la rigidezza, il secondo diminuisce. Per ogni λ governa il maggiore dei due. Il minimo del loro inviluppo cade dunque nel punto in cui i due picchi hanno lo stesso modulo.

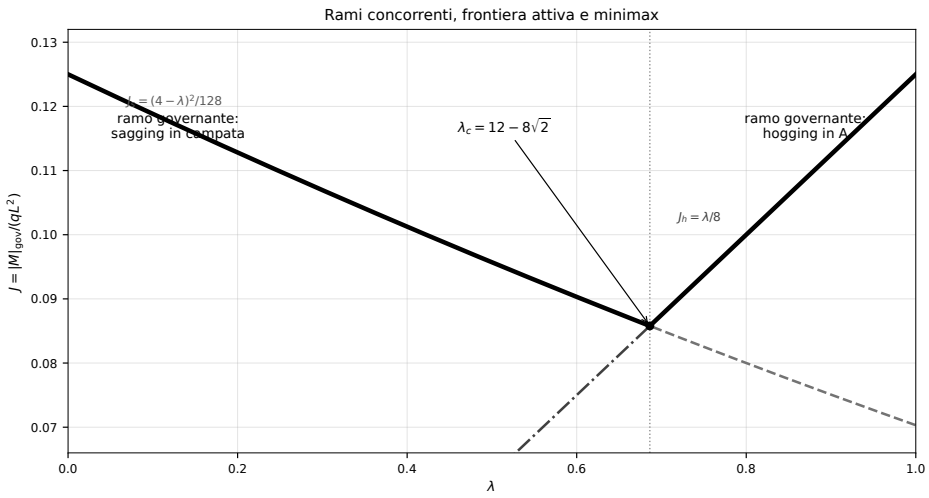


Figura 10.3 del volume. La curva spessa segue il maggiore dei due picchi.

$$\frac{\lambda}{8} = \frac{(4-\lambda)^2}{128} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_c = 12 - 8\sqrt{2} \simeq 0{,}6863.$$

SOLUZIONE NUMERICA

Due sezioni, lo stesso picco

Dalla soglia si risale alla rigidezza fisica della molla.

$$\rho_c = \frac{3\lambda_c}{1-\lambda_c} \simeq 6{,}563, \qquad K_\theta = \rho_c \frac{EI}{L} \simeq 65\,630 \text{ kN m/rad}.$$

In A il momento vale +30,88 kN·m. A 3,515 m da A raggiunge −30,88 kN·m. La curva intermedia nel diagramma mostra i due estremi, uno sopra e uno sotto l’asse.

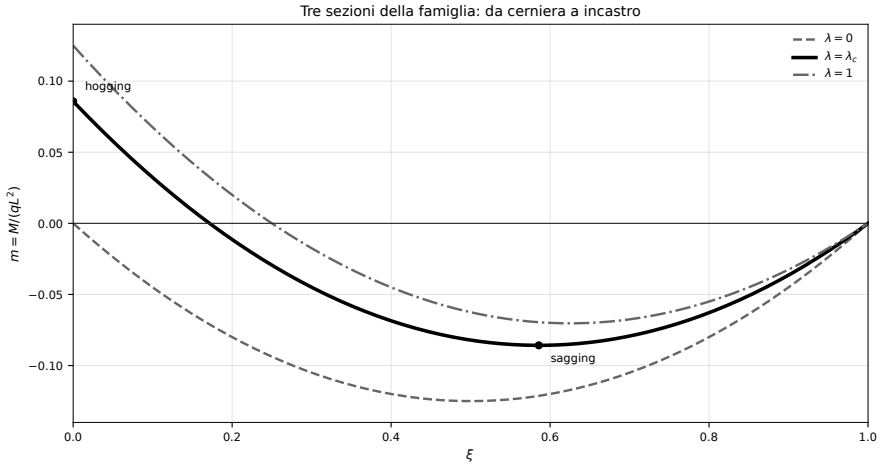


Figura 10.4 del volume. Diagrammi del momento nei tre stati di riferimento.

Il confronto con i casi limite

Vincolo in A	M in A	Minimo in campata
Cerniera	0,00	−45,00
Molla ottimale	+30,88	−30,88
Incastro ideale	+45,00	−25,31

Momenti flettenti in kN·m.

Con la molla intermedia il picco scende da 45,00 a 30,88 kN·m, una riduzione del 31,37% rispetto a entrambi i casi limite.